پاسخ تمرین جلسه هشتم

۱

$$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n]\,e^{-jk\omega_0 n}$$

داریم $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \Rightarrow \omega_0 N_0 = 2\pi$

$$a_{k+N_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n]\,e^{-j(k+N_0)\omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n]\,e^{-jk\omega_0 n}\,e^{-jN_0\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n]\,e^{-jk\omega_0 n}\,e^{-j2\pi n}$$

داریم $e^{-j2\pi n} = \cos 2\pi n + j\sin 2\pi n = \cos 2\pi n = 1$

$$\Rightarrow a_{k+N_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{\langle N_0\rangle} x[n]\,e^{-jk\omega_0 n} = a_k$$

۲ سیگنال داده شده نه زوج است و نه فرد ولی $x[n+2]$ فرد است. لذا ضرائب سری فوریه $x[n+2]$ موهومی خالص و فرد است و فاز آن‌ها $\pm\frac{\pi}{2}$ است. اگر ضرائب سری فوریه $x[n]$ را a_k بنامیم ضرائب سری فوریه $x[n+2]$ برابر $e^{j2k\omega_0}a_k$ می‌باشد. با توجه به شکل $N_0 = 9$ و $\omega_0 = \frac{2\pi}{9}$ است بنابراین ضرائب سری فوریه $x[n+2]$ برابر $e^{j\frac{4k\pi}{9}}a_k$ می‌باشد و

$$\angle e^{j\frac{4k\pi}{9}}a_k = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle a_k + \angle e^{j\frac{4k\pi}{9}} = \pm\pi/2$$

$$\Rightarrow \angle a_k + 4\pi k/9 = \pm\pi/2$$

$$\Rightarrow \angle a_k = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{4k\pi}{9}$$

1) $a_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} x[n] = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} x[n] = \frac{1}{5}$

2) $\sum_{k=0}^{9} a_k = x[0] = 1$

3) $\sum_{k=-35}^{-25} a_k = \sum_{k=-25}^{-15} a_k = \sum_{k=-15}^{-5} a_k = \sum_{k=-5}^{5} a_k = \sum_{k=-5}^{4} a_k + a_5 = x[0] + a_5$

$\sum a_{k+N_0} = \sum a_k$ با توجه به اینکه

با توجه به قسمت ۲ همین تمرین

$a_5 = \frac{1}{10} \sum e^{-j5\frac{2\pi}{10}n} x[n] = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} e^{-j\pi n} x[n] = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} (-1)^n x[n] = 0$

$\Longrightarrow \sum_{k=-35}^{-25} a_k = x[0] + a_5 = 1 + 0 = 1$

4) $\sum_{k=-6}^{3} |a_k|^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \frac{11}{5}$

5) $\sum_{k=-3}^{3} a_{10k+5} = a_{-25} + a_{-15} + a_{-5} + a_5 + a_{15} + a_{25} + a_{35}$

با توجه به اینکه $a_{N_0+k} = a_k$ الف داریم

$\sum_{k=-3}^{3} a_{10k+5} = 7 a_5 = 7\,(0) = 0$

در قسمت قبل محاسبه شد.

پاسخ تمرینات سری نهم

پاسخ ۱.

$$x_1[n] = \alpha^n u[n] \qquad |\alpha|<1 \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$x_2[n] = n x_1[n] = n\alpha^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}) = j\frac{dX_1}{d\omega} = j\frac{-j\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-e^{-j\omega})^2}$$

$$x[n] = \frac{1}{\alpha}x_2[n+1] = \frac{1}{\alpha}(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1] = (n+1)\alpha^n u[n+1] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

$\downarrow \mathcal{F}$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\alpha}e^{j\omega}X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{\alpha}e^{j\omega}\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-e^{-j\omega})^2} = \frac{1}{(1-e^{-j\omega})^2}$$

توضیح:

در خط اول از رابطه اصلی $\alpha^n u[n]$ استفاده شده است.

در خط دوم با توجه به خاصیت مشتق‌گیری (خاصیت شماره ۱۲ صفحه ۹-۱۳) از تابع بدست آمده در بالا مشتق گرفته شده است. ضمناً

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}$$

در خط سوم تابع $(n+1)\alpha^n u[n]$ از روی $x_1[n]$ ساخته شده است. در قسمت آخر که $u[n+1]$ به $u[n]$ تبدیل شد دلیل این است که درست است که $u[n+1]$ از $n=-1$ شروع می‌شود ولی به ازای $n=-1$ ضریب $(n+1)$ مساوی صفر شده و در عمل این مقدار وجود ندارد.

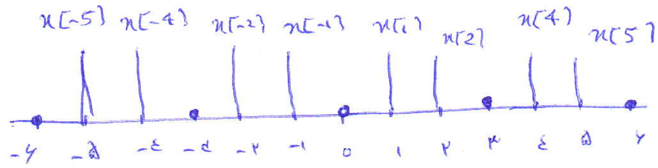
پاسخ ۲.

الف) $X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 9$

ب) $X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = -1$

ج) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi$

د) $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum (n x[n])^2 = 610\pi$



پاسخ ۳

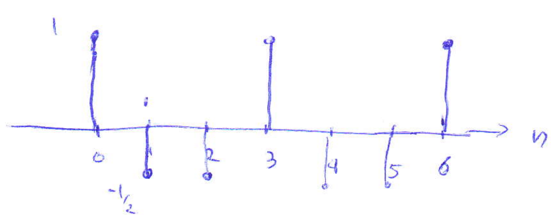
ابتدا تابع $y[n]$ را برحسب نمونه‌هایش می‌نویسیم:

حال مقادیر یک دوره تناوب $\cos(\frac{2\pi}{3} n)$ را می‌نویسیم

$n = 0 \quad \cos(0) = 1$

$n = 1 \quad \cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(120^\circ) = \frac{-1}{2}$

$n = 2 \quad \cos(\frac{4\pi}{3}) = \cos(240) = -\frac{1}{2}$



حال به رابطه‌ای بین $y[n]$ با $x[n]$ و $\cos(\frac{2\pi}{3} n)$ دست آوریم

$$y[n] = \left(x[n] - x[n]\cos(\frac{2\pi n}{3}) \right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} x[n] - \frac{2}{3} x[n] \cos(\frac{2\pi n}{3})$$

$$= \frac{2}{3} x[n] - \frac{2}{3} x[n] \frac{e^{j\frac{2\pi}{3}n} + e^{-j\frac{2\pi}{3}n}}{2} = \frac{2}{3} x[n] - \frac{1}{3} x[n] e^{j\frac{2\pi n}{3}} - \frac{1}{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{3}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{3} X(e^{j\omega}) - \frac{1}{3} X(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{3})}) - \frac{1}{3} X(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{3})})$$